第 XX 卷　第 XX 期　　　中山大学学报（自然科学版中英文）　　　Vol. XX　No. XX
XXXX 年　XX 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　XX　XXXX

DOI：10. 11714/acta. snus. ZR20240268

带有Hardy项的一类非线性椭圆型方程解的存在性*

刘晶晶，王琳琳

鲁东大学数学与统计科学学院，山东 烟台 264025

摘　要：主要研究一类非线性椭圆型方程$-\Delta u - \lambda u / |x|^2 + b(x)g(u) = 0,\ x \in \Omega \backslash \{0\}$，其中$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geqslant 3)$是一个包含原点的光滑有界域. 当$\lambda > (N-2)^2/4$时，通过上下解方法，得到该方程正解的存在性；通过比较原理得到$C_3 |x|^{-\frac{2+\theta}{q-1}} \leqslant u(x) \leqslant C_4 |x|^{-\frac{2+\theta}{q-1}}$.进而得到$\lim\limits_{|x| \to 0} \dfrac{u(x)}{U_0(x)} = mr$，其中$U_0(x) = l^{\frac{1}{q-1}} |x|^{-\frac{2+\theta}{q-1}}$.

关键词：非线性椭圆型方程；Hardy项；解的存在性；上下解方法；比较原理

中图分类号：O175.2　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**2097－0137(XXXX)XX－0001－07

The existence of solutions for a class of nonlinear elliptic equations with Hardy potential

LIU Jingjing, *WANG Linlin*

School of Mathematics and Statistics Sciences, *Ludong University*, *Yantai 264025*, *China*

Abstract: In this paper, we study a class of nonlinear elliptic equation $-\Delta u - \lambda u / |x|^2 + b(x)g(u) = 0,\ x \in \Omega \backslash \{0\}$, where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geqslant 3)$ is a smooth bounded domain and $0 \in \Omega$. When $\lambda > (N-2)^2/4$, by means of the sub and super solution method, we explore the existence of positive solutions. By the comparison principle, we obtain $C_3 |x|^{-\frac{2+\theta}{q-1}} \leqslant u(x) \leqslant C_4 |x|^{-\frac{2+\theta}{q-1}}$, and then $\lim\limits_{|x| \to 0} \dfrac{u(x)}{U_0(x)} = mr$ has been proven, where $U_0(x) = l^{\frac{1}{q-1}} |x|^{-\frac{2+\theta}{q-1}}$.

Key words: nonlinear elliptic equation; Hardy potential; existence of solution; sub and super solution method; comparison principle

近年来，带有Hardy项的椭圆型方程引起了许多学者的关注，这类研究在热传导理论、流体力学等领域有着重要的现实意义和理论意义，如半线性椭圆型的稳定性分析（Brezis et al., 1997）和抛物型方程解的稳定性（Cabré et al., 1998）；具有奇异势的热方程的渐近行为（Vázquez et al., 2000）以及摄动Schrödinger算子的椭圆型方程特征值的稳定性（Adimurthi et al., 2005）.

本文研究如下带有Hardy-Schrödinger算子的椭圆型方程

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda}{|x|^2} u - b(x)g(u), & x \in \Omega \backslash \{0\}, \\ u > 0, & x \in \Omega \backslash \{0\}, \end{cases} \tag{1}$$

* **收稿日期：**2024－09－03　　**录用日期：**2025－11－09　　**网络首发日期：**XXXX－XX－XX
基金项目：鲁东大学研究生创新项目（IPGS2024-041）；国家自然科学基金（11201213）；
山东省优质研究生课程建设项目（SDYKC2025172）
作者简介：刘晶晶（2000年生），女；**研究方向：**微分方程及其应用；E-mail：ljjli1@sina.com
通信作者：王琳琳（1976年生），女；**研究方向：**非线性分析及微分方程；E-mail：llwang@ldu.edu.cn
全文阅读
ZR20240268

解的存在性，其中$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N(N \geqslant 3)$为$\mathbb{R}^N$或者为包含原点的开集$\Omega_0$，$\lambda \in \mathbb{R}$.

假设如下条件成立

(b_1)存在$\theta > -2$，$m > 0$，使得$\lim\limits_{|x| \to 0} \dfrac{b(x)}{|x|^\theta} = m$.

(b_2) $b(x)$是一个连续有界函数.

(b_3)存在$C_1 > 0$，$C_2 > 0$，使得任意$x \in \Omega$，有$C_1|x|^\theta \leqslant b(x) \leqslant C_2|x|^\theta$.

(g_1)存在$\alpha > 1$，$0 < p < +\infty$，使得$\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{g(u)}{u^\alpha} = p$.

(g_2)存在$q > 1$，$r > 0$，使得$\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{g(u)}{u^q} = r$.

(g_3) $g(u)/u$单调递增.

Carmona et al.（2013）、Wang et al.（2019）、Zhang et al.（2019，2024）、Montenegro et al.（2021）、Saeedi et al.（2023）等研究了非线性椭圆型方程解的存在性. Cîrstea et al.（2021）研究了如下方程

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda}{|x|^2} u - |x|^\theta u^q, & x \in \Omega \backslash \{0\}, \\ u > 0, & x \in \Omega \backslash \{0\}, \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性，其中$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N(N \geqslant 3)$，$q > 1$，$\theta \in \mathbb{R}$. 得到当$\lambda > (N-2)^2/4$时，$U_0(x) = l^{\frac{1}{q-1}}|x|^{-Z}$是方程(2)的唯一解，其中$l \coloneqq Z^2 - (N-2)Z + \lambda$，$Z = (\theta+2)/(q-1)$；当$Z(N-2-Z) < \lambda < (N-2)^2/4$时，方程(2)的所有解是径向对称的. Wei et al.（2017）研究在$\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$中，当方程(1)中的$b(x) = |x|^\theta(\theta > -2)$时，方程

$$-\Delta u = \frac{\lambda}{|x|^2} u - |x|^\theta g(u), \qquad x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$$

的正解在原点处的确切渐近估计. Du（2006）研究当方程(1)中的$g(u) = u^q(q > 1)$时，利用上下解方法和比较原理，探讨了最小正解和最大正解的存在性. 通过标度化技术，得到了原点附近正解的渐近性.

本文仅考虑当条件(K)：$\lambda > (N-2)^2/4$，$\theta > -2$成立时，方程(1)解的存在性. 主要结论如下

定理1 假设条件(K)成立，$b(x)$满足条件(b_2)、(b_3)，$g(u)$满足条件(g_1)、(g_2)、(g_3). 则当$\Omega = \mathbb{R}^N$时，方程(1)至少有一个解.

推论1 假设条件(K)成立，$b(x)$满足条件(b_2)、(b_3)，$g(u)$满足条件(g_1)、(g_2)、(g_3). 令$u(x)$是方程(1)的任意正解. 那么存在δ_0、C_3、C_4(依赖于δ_0)，对于任意$x \in B_{\delta_0}(0) \backslash \{0\}$，有

$$C_3|x|^{-\frac{2+\theta}{q-1}} \leqslant u(x) \leqslant C_4|x|^{-\frac{2+\theta}{q-1}}. \tag{3}$$

定理2 假设条件(K)成立，$b(x)$满足条件(b_1)、(b_2)、(b_3)，$g(u)$满足条件(g_1)、(g_2)、(g_3). 对于$\Omega = \Omega_0$，其中Ω_0为包含原点的开集，则方程(1)的所有解均满足$\lim\limits_{|x| \to 0} \dfrac{u(x)}{U_0(x)} = mr$.

1 预备知识

引理1（Hardy不等式（García et al.，1998）） 设$1 < p < N$，$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$，则

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{u^p}{|x|^p} \mathrm{d}x. \tag{4}$$

当$p = 2$时，有$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \geqslant \dfrac{(N-2)^2}{4} \int_\Omega \dfrac{u^2}{|x|^2} \mathrm{d}x$.

引理2（比较原理（Cîrstea et al.，2004）） 令$\lambda \in \mathbb{R}$，$N \geqslant 3$，ω是$\mathbb{R}^N$中的一个光滑的有界域，且$\bar{\omega} \subseteq \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$. 设在$\omega$中，$b \in C^{0,\tau}(\bar{\omega})$，且$b > 0$，$\tau \in (0,1)$. 令$u_1$和$u_2$是正的$C^1(\omega)$-函数，满足

$$\begin{cases} -L_\lambda(u_1) + b(x)g(u_1) \leqslant 0 \leqslant -L_\lambda(u_2) + b(x)g(u_2), & x \in \omega, \\ \limsup\limits_{x \to \partial\omega} [u_1(x) - u_2(x)] \leqslant 0, \end{cases} \tag{5}$$

其中 g 是 $(0,+\infty)$ 上的一个连续函数，$L_\lambda := \Delta + \lambda|x|^{-2}$，使得对于 $t>0$，$g(t)/t$ 单调递增．u 是非负的且满足 $\min\{u_1,u_2\} < u < \max\{u_1,u_2\}$．那么对任意 $x\in\omega$，有 $u_1 \leqslant u_2$．

引理3 假设条件 (K) 成立，$b(x)$ 满足条件 (b_1)、(b_2)，$g(u)$ 满足条件 (g_2)，(g_4)．设 $\alpha=\alpha(N,q,\theta,\lambda)>0$，$v=v(N,q,\theta,\lambda)>0$，$0<\varepsilon_1<\min\{m,r\}/2$ 充分小，则 $\exists\delta>0$，对于任意 $\varepsilon\in(0,\ 1/2)$，存在 $0<\eta_0=\eta_0(N,q,\theta,\lambda)<3Z/4$，使得对 $\forall x\in B_\delta(0)\backslash\{0\}$ 以及任意 $\eta\in(0,\eta_0)$，有

$$-L_\lambda(\omega^+_{\varepsilon,\eta})+b(x)g(\omega^+_{\varepsilon,\eta})\geqslant 0,\qquad -L_\lambda(\omega^-_{\varepsilon,\eta})+b(x)g(\omega^-_{\varepsilon,\eta})\leqslant 0,\tag{6}$$

其中

$$\omega^-_{\varepsilon,\eta} := (1-\varepsilon)(m+\varepsilon_1)(r+\varepsilon_1)U_0(x)|x|^{\eta}\left(B+\frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}},$$

$$\omega^+_{\varepsilon,\eta} := (1+\varepsilon)(m-\varepsilon_1)(r-\varepsilon_1)U_0(x)|x|^{-\eta}\left(A+\frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}},$$

$$A := \left[(m-\varepsilon_1)(r-\varepsilon_1)\right]^{\frac{q}{2}},\qquad B := \left[(m+\varepsilon_1)(r+\varepsilon_1)\right]^{\frac{q}{2}}.$$

证明 由条件 (b_1) 易知对任意满足条件 $0<\varepsilon_1<\min\{m,r\}$ 的 ε_1，存在 $\delta_1>0$，使得当 $0<|x|<\delta_1$ 时，有

$$(m-\varepsilon_1)|x|^\theta \leqslant b(x) \leqslant (m+\varepsilon_1)|x|^\theta.$$

由于当 $|x|\to 0$ 时，$\omega^+_{\varepsilon,\eta}\to+\infty$，则根据条件 (g_2) 知，对于上述的 $\varepsilon_1>0$，存在 $\delta_2>0$，使得当 $0<|x|<\delta_2$ 时，有 $\omega^+_{\varepsilon,\eta}>1$ 且 $(r-\varepsilon_1)(\omega^+_{\varepsilon,\eta})^q \leqslant g(\omega^+_{\varepsilon,\eta}) \leqslant (r+\varepsilon_1)(\omega^+_{\varepsilon,\eta})^q$．

又由于当 $|x|\to 0$ 时，$\omega^-_{\varepsilon,\eta}\to+\infty$，根据条件 (g_2) 知，对于上述的 $\varepsilon_1>0$，存在 $\delta_3>0$，使得当 $0<|x|<\delta_3$ 时，有 $\omega^-_{\varepsilon,\eta}>1$ 且 $(r-\varepsilon_1)(\omega^-_{\varepsilon,\eta})^q \leqslant g(\omega^-_{\varepsilon,\eta}) \leqslant (r+\varepsilon_1)(\omega^-_{\varepsilon,\eta})^q$．注意到 $\omega^+_{\varepsilon,\eta}\to+\infty$ 与 $\omega^-_{\varepsilon,\eta}\to+\infty$ 对 $\varepsilon\in(0,\ 1/2)$ 都是一致的，因而可以选取上述的 $\delta_i(i=1,2,3)$ 与 $\varepsilon\in(0,\ 1/2)$ 无关．令 $\delta=\min\{1,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3\}$，下面在 $B_\delta(0)\backslash\{0\}$ 中讨论．因为

$$L_\lambda(\omega^+_{\varepsilon,\eta}) = (m-\varepsilon_1)(r-\varepsilon_1)(1+\varepsilon)l^{\frac{q}{q-1}}|x|^{-Z-\eta-2}\left(A+\frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-2}\left(A^+_\eta\frac{|x|^{2\alpha}}{v^2}+B^+_\eta\frac{|x|^\alpha}{v}+C^+_\eta\right),$$

其中

$$\begin{cases} A^+_\eta = 1+\eta\left(\eta+2Z+2-N-2\sqrt{\alpha}\right)\big/l+\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}-2Z-2+N\right)\big/l, \\ B^+_\eta = 2A\left[1+\eta\left(\eta+2Z+2-N-\sqrt{\alpha}\right)\big/l+\sqrt{\alpha}\,(\alpha-2Z-2+N)\big/(2l)\right], \\ C^+_\eta = A^2\left[1+\eta\left(\eta+2Z+2-N\right)\big/l\right], \end{cases}$$

$$b(x)g(\omega^+_{\varepsilon,\eta}) \geqslant (m-\varepsilon_1)(r-\varepsilon_1)|x|^\theta(\omega^+_{\varepsilon,\eta})^q = (m-\varepsilon_1)^{q+1}(r-\varepsilon_1)^{q+1}(1+\varepsilon)^q l^{\frac{q}{q-1}}|x|^{-Zq-\eta q+\theta}\left(A+\frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{\frac{q}{\sqrt{\alpha}}},$$

所以

$$\frac{L_\lambda(\omega^+_{\varepsilon,\eta})}{b(x)g(\omega^+_{\varepsilon,\eta})} \leqslant (1+\varepsilon)^{1-q}(r-\varepsilon_1)^{-q}(m-\varepsilon_1)^{-q}|x|^{(q-1)\eta}\left(A+\frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{\frac{1-q}{\sqrt{\alpha}}-2}\left(A^+_\eta\frac{|x|^{2\alpha}}{v^2}+B^+_\eta\frac{|x|^\alpha}{v}+C^+_\eta\right).$$

设 $Y^+_\eta\left(\frac{|x|^\alpha}{v}\right)=\left(A+\frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{\frac{1-q}{\sqrt{\alpha}}-2}\left(A^+_\eta\frac{|x|^{2\alpha}}{v^2}+B^+_\eta\frac{|x|^\alpha}{v}+C^+_\eta\right)$，令 $t=\frac{|x|^\alpha}{v}$，可得

$$Y^+_\eta(t) = (A+t)^{\frac{1-q}{\sqrt{\alpha}}-2}\left(A^+_\eta t^2+B^+_\eta t+C^+_\eta\right).$$

对任意 $t>0$，

$$\frac{\mathrm{d}Y^+_\eta(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{q-1}{\sqrt{\alpha}}\,(A+t)^{-\frac{q-1}{\sqrt{\alpha}}-3}\left(A^+_\eta t^2+D^+_\eta t+E^+_\eta\right),$$

其中

$$D_\eta^+ = \left(1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{q-1}\right)B_\eta^+ - \frac{2A\sqrt{\alpha}}{q-1}A_\eta^+, \qquad E_\eta^+ = \left(1 + \frac{2\sqrt{\alpha}}{q-1}\right)C_\eta^+ - \frac{A\sqrt{\alpha}}{q-1}B_\eta^+.$$

令$\alpha > 0$足够小，且仅依赖于N、q、θ、λ，使得

$$\lim_{\eta\to 0} A_\eta^+ > 0, \quad \lim_{\eta\to 0} D_\eta^+ > 0, \quad \lim_{\eta\to 0} E_\eta^+ > 0.$$

因此，存在$\eta_1 = \eta_1(N,q,\theta,\lambda) > 0$，使得对于任意$\eta \in (0,\eta_1)$，$A_\eta^+$、$D_\eta^+$、$E_\eta^+$是正的．由$q > 1$知，$-\frac{q-1}{\sqrt{\alpha}} < 0$，从而$Y_\eta^+$单调递减，$\sup_{t\in(0,\infty)} Y_\eta^+(t) = Y_\eta^+(0) = C_\eta^+$. 因为$\lim_{\eta\to 0} C_\eta^+ = A^2$，所以$\exists\, \eta_2 = \eta_2(N,q,\theta,\lambda)$，使得对$\forall \eta \in (0,\eta_2)$有$C_\eta^+ \leqslant A^2(1+\varepsilon)^{q-1}$. 选取$\eta_3 = \min\{\eta_1,\ \eta_2,\ 3Z/4\}$，从而当$\eta \in (0,\eta_3)$且$|x| < \delta$时有

$$-L_\lambda(\omega_{\varepsilon,\eta}^+) + b(x)g(\omega_{\varepsilon,\eta}^+) \geqslant 0.$$

由于

$$L_\lambda(\omega_{\varepsilon,\eta}^-) = (m+\varepsilon_1)(r+\varepsilon_1)(1-\varepsilon)l^{\frac{q}{q-1}}|x|^{-Z+\eta-2}\left(B + \frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-2}\left(A_\eta^- \frac{|x|^{2\alpha}}{v^2} + B_\eta^- \frac{|x|^\alpha}{v} + C_\eta^-\right),$$

其中

$$\begin{cases} A_\eta^- = 1 - \eta\left(\eta + 2Z + 2 - N + 2\sqrt{\alpha}\right)/l - \sqrt{\alpha}\left(-\sqrt{\alpha} - 2Z - 2 + N\right)/l, \\ B_\eta^- = 2B\left[1 - \eta\left(\eta + 2Z + 2 - N + \sqrt{\alpha}\right)/l - \sqrt{\alpha}\,(\alpha - 2Z - 2 + N)/(2l)\right], \\ C_\eta^- = B^2\left[1 - \eta\left(-\eta + 2Z + 2 - N\right)/l\right], \end{cases}$$

$$b(x)g(\omega_{\varepsilon,\eta}^-) \leqslant (m+\varepsilon_1)(r+\varepsilon_1)|x|^\theta(\omega_{\varepsilon,\eta}^-)^q = (m+\varepsilon_1)^{1+q}(r+\varepsilon_1)^{1+q}(1-\varepsilon)^{1-q}l^{\frac{q}{q-1}}|x|^{-Zq+\eta q+\theta}\left(B + \frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{-\frac{q}{\sqrt{\alpha}}}.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{L_\lambda(\omega_{\varepsilon,\eta}^-)}{b(x)g(\omega_{\varepsilon,\eta}^-)} &\geqslant (1-\varepsilon)^{1-q}(m+\varepsilon_1)^{-q}(r+\varepsilon_1)^{-q}|x|^{(1-q)\eta}\left(B + \frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{-\frac{1-q}{\sqrt{\alpha}}-2}\left(A_\eta^- \frac{|x|^{2\alpha}}{v^2} + B_\eta^- \frac{|x|^\alpha}{v} + C_\eta^-\right) \\ &\geqslant (1-\varepsilon)^{1-q}(m+\varepsilon_1)^{-q}(r+\varepsilon_1)^{-q}\left(B + \frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{-\frac{1-q}{\sqrt{\alpha}}-2}\left(A_\eta^- \frac{|x|^{2\alpha}}{v^2} + B_\eta^- \frac{|x|^\alpha}{v} + C_\eta^-\right).\end{aligned}$$

设$Y_\eta^-\left(\frac{|x|^\alpha}{v}\right) = \left(B + \frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{-\frac{1-q}{\sqrt{\alpha}}-2}\left(A_\eta^- \frac{|x|^{2\alpha}}{v^2} + B_\eta^- \frac{|x|^\alpha}{v} + C_\eta^-\right)$. 令$t = \frac{|x|^\alpha}{v}$，则

$$Y_\eta^-(t) = (B+t)^{-\frac{1-q}{\sqrt{\alpha}}-2}\left(A_\eta^- t^2 + B_\eta^- t + C_\eta^-\right).$$

对于任意$t > 0$，

$$\frac{\mathrm{d}Y_\eta^-(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{q-1}{\sqrt{\alpha}}(B+t)^{\frac{q-1}{\sqrt{\alpha}}-3}\left(A_\eta^- t^2 + D_\eta^- t + E_\eta^-\right),$$

其中

$$D_\eta^- = \left(1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{q-1}\right)B_\eta^- + \frac{2B\sqrt{\alpha}}{q-1}A_\eta^-, \qquad E_\eta^- = \left(1 - \frac{2\sqrt{\alpha}}{q-1}\right)C_\eta^- + \frac{B\sqrt{\alpha}}{q-1}B_\eta^-.$$

令$\alpha > 0$足够小，且仅依赖于N、q、θ、λ，使得

$$\lim_{\eta\to 0} A_\eta^- > 0, \quad \lim_{\eta\to 0} D_\eta^- > 0, \quad \lim_{\eta\to 0} E_\eta^- > 0.$$

因此，存在$\eta_4 = \eta_4(N,q,\theta,\lambda) > 0$，使得对于任意$\eta \in (0,\eta_4)$，$A_\eta^-$、$D_\eta^-$、$E_\eta^-$是正的，且$C_\eta^- \geqslant B^2(1-\varepsilon)^{q-1}$. 从而当$x \in B_\delta(0)\backslash\{0\}$时，$-L_\lambda(\omega_{\varepsilon,\eta}^-) + b(x)g(\omega_{\varepsilon,\eta}^-) \leqslant 0$.

综上所述，选取 $\eta_0=\min\{\eta_3,\eta_4\}$，则当 $x\in B_\delta(0)\backslash\{0\}$ 且 $\eta\in(0,\eta_0)$ 时，式(6)成立，命题得证.

2　定理的证明

定理 1 的证明　根据 Cîrstea et al.(2021)可知，U_0 是方程(2)的解. 当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\varepsilon U_0\to 0$，从而根据条件(g_1)知，存在 $u_1>0$，使得当 $0<\varepsilon U_0<u_1$ 时，有 $\frac{p}{2}(\varepsilon U_0)^\alpha\leqslant g(\varepsilon U_0)\leqslant\frac{3p}{2}(\varepsilon U_0)^\alpha$. 当 $M\to+\infty$ 时，$MU_0\to+\infty$，故根据条件(g_2)得：存在 $u_1>0$，使得当 $MU_0>u_1$ 时，有 $\frac{r}{2}(MU_0)^q\leqslant g(MU_0)\leqslant\frac{3r}{2}(MU_0)^q$.

由于

$$\left[-\Delta(\varepsilon U_0)-\frac{\lambda}{|x|^2}\varepsilon U_0+b(x)g(\varepsilon U_0)\right]-\left[-\varepsilon\Delta U_0-\frac{\lambda}{|x|^2}\varepsilon U_0+|x|^\theta\varepsilon U_0{}^q\right]$$
$$=b(x)g(\varepsilon U_0)-|x|^\theta\varepsilon U_0{}^q\leqslant\frac{3pC_2}{2}|x|^\theta\varepsilon^\alpha U_0{}^\alpha-\varepsilon|x|^\theta U_0{}^q=\left(-\varepsilon+\frac{3pC_2}{2}\varepsilon^\alpha U_0{}^{\alpha-q}\right)|x|^\theta U_0{}^q,$$

当 $\delta<|x|<r_1$ 时，$|x|^{\alpha-q}$ 有界；令 $\varepsilon\to 0$，得 $-\varepsilon|x|^\theta U_0{}^q+b(x)g(\varepsilon U_0)\leqslant 0$. 因此，$\varepsilon U_0$ 是方程(1)在 $\delta<|x|<r_1$ 中的下解.

由于

$$\left[-\Delta(MU_0)-\frac{\lambda}{|x|^2}MU_0+b(x)g(MU_0)\right]-\left[-M\Delta U_0-\frac{\lambda}{|x|^2}MU_0+|x|^\theta MU_0{}^q\right]$$
$$=b(x)g(MU_0)-|x|^\theta MU_0{}^q\geqslant\left(-M+\frac{rC_1}{2}M^q\right)|x|^\theta U_0^q,$$

令 M 充分大，得 $-M|x|^\theta U_0{}^q+b(x)g(MU_0)\geqslant 0$. 因此，$MU_0$ 是方程(1)在 $\delta<|x|<r_1$ 中的上解. 根据上下解方法，当 $\delta<|x|<r_1$ 时，有 $\varepsilon U_0\leqslant u(x)\leqslant MU_0$，故方程(1)有解.

当 $r_1/2\leqslant|x|\leqslant 3R_1/2$ 时，记 $B_\varsigma=\left\{x\,\middle|\,r_1/2\leqslant|x|\leqslant 3R_1/2\right\}$. 设 $m_1=\inf\limits_{B_\varsigma}|x|^\theta U_0^q$，$m_2=\sup\limits_{B_\varsigma}|x|^\theta U_0^\alpha$. 由 $b(x)$ 连续有界，则令 $M_1=\sup\limits_{B_\varsigma}b(x)U_0^q$，$M_2=\inf\limits_{B_\varsigma}b(x)U_0^\alpha$. 由于

$$\left[-\Delta(\varepsilon U_0)-\frac{\lambda}{|x|^2}\varepsilon U_0+b(x)g(\varepsilon U_0)\right]-\left[-\varepsilon\Delta U_0-\frac{\lambda}{|x|^2}\varepsilon U_0+|x|^\theta\varepsilon U_0{}^q\right]$$
$$=b(x)g(\varepsilon U_0)-|x|^\theta\varepsilon U_0{}^q\leqslant\frac{3p}{2}\varepsilon^\alpha M_2-\varepsilon m_1,$$

令 $\varepsilon\to 0$，则

$$-\Delta(\varepsilon U_0)-\frac{\lambda}{|x|^2}\varepsilon U_0+b(x)g(\varepsilon U_0)\leqslant-\Delta(\varepsilon U_0)-\frac{\lambda}{|x|^2}\varepsilon U_0+|x|^\theta\varepsilon U_0{}^q.$$

因此，εU_0 是方程(1)在 $r_1/2\leqslant|x|\leqslant 3R_1/2$ 中的下解.

由于

$$\left[-\Delta(MU_0)-\frac{\lambda}{|x|^2}MU_0+b(x)g(MU_0)\right]-\left[-M\Delta U_0-\frac{\lambda}{|x|^2}MU_0+|x|^\theta MU_0{}^q\right]$$
$$=-M|x|^\theta U_0^q+b(x)g(MU_0)\geqslant-Mm_1+\frac{p}{2}M^qM_1,$$

令 M 充分大，得

$$-\Delta MU_0-\frac{\lambda}{|x|^2}MU_0+b(x)g(MU_0)\geqslant-\Delta MU_0-\frac{\lambda}{|x|^2}MU_0+|x|^\theta MU_0{}^q.$$

因此，MU_0 是方程(1)在 $r_1/2\leqslant|x|\leqslant 3R_1/2$ 中的上解. 从而当 $r_1/2\leqslant|x|\leqslant 3R_1/2$ 时，$\varepsilon U_0\leqslant u(x)\leqslant MU_0$，故方程(1)有解.

由于

$$\left[-\Delta(\varepsilon U_0)-\frac{\lambda}{|x|^2}\varepsilon U_0+b(x)g(\varepsilon U_0)\right]-\left[-\varepsilon\Delta U_0-\frac{\lambda}{|x|^2}\varepsilon U_0+|x|^\theta\varepsilon U_0{}^q\right]$$
$$=b(x)g(\varepsilon U_0)-|x|^\theta\varepsilon U_0{}^q\leqslant\left(-\varepsilon+C_2\frac{3p}{2}\varepsilon^\alpha U_0{}^{\alpha-q}\right)|x|^\theta U_0{}^q,$$

当$|x|>R_1$时，$|x|^{\alpha-q}$有界．令$\varepsilon\to 0$，得$-\varepsilon|x|^\theta U_0{}^q+b(x)g(\varepsilon U_0)\leqslant 0$. 因此，$\varepsilon U_0$是方程(1)在$|x|>R_1$中的下解．

由于

$$\left[-\Delta(MU_0)-\frac{\lambda}{|x|^2}MU_0+b(x)g(MU_0)\right]-\left[-M\Delta U_0-\frac{\lambda}{|x|^2}MU_0+|x|^\theta MU_0{}^q\right]$$
$$=-M|x|^\theta U_0^q+b(x)g(MU_0)\geqslant\left(-M+\frac{C_1r}{2}M^q\right)|x|^\theta U_0^q,$$

令M充分大，得$-M|x|^\theta U_0{}^q+b(x)g(MU_0)\geqslant 0$. 因此，$MU_0$是方程(1)在$|x|>R_1$中的上解．从而当$|x|>R_1$时，$\varepsilon U_0\leqslant u(x)\leqslant MU_0$，故方程(1)有解．

综上所述，方程(1)的解在$\mathbb{R}^N\backslash\{x\,||x|<\delta\}$上有解，记为$u_\delta(x)$，易知$u_\delta(x)$关于$\delta$是单调递减的，考虑如下比较方程，其中$\Omega_1$是任意包含原点为其内点且直径充分大的紧集．由$b(x)$, $g(u)$满足的条件易知，$-\lambda u/|x|^2+b(x)g(u)$在$\Omega_1$上满足Keller-Osserman条件(Du，2006). 因此，该方程有解$U(x)$. 由比较原理(引理2)易知，$u_\delta(x)\leqslant U(x), \forall x\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}\cap\Omega_1$.

$$\begin{cases}-\Delta u=\dfrac{\lambda}{|x|^2}u-b(x)g(u), & x\in\Omega_1\backslash\{0\},\\ u>0, & x\in\Omega_1\backslash\{0\},\\ u=+\infty, & x\in\partial\Omega_1.\end{cases}$$

于是对任意的$x\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$，$\lim\limits_{\delta\to 0^+}u_\delta(x)$存在，该极限是方程(1)在$\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$的解．定理1证毕．

定理2的证明 令$r_0\in(0,\delta)$，使得$\overline{B_{r_0}(0)}\subset\Omega$. 令$\alpha>0$，$u$是方程(1)在$\Omega\backslash\{0\}$内的任意正解．令$v=v(N,q,\theta,\lambda)>0$足够小，$0<\varepsilon_1<\min\{m,r\}/2$，使得下面两个不等式成立

$$\begin{cases}(m+\varepsilon_1)(r+\varepsilon_1)U_0(r_0)\left(B+\dfrac{r_0^\alpha}{v}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}\leqslant\min\limits_{x\in\partial B_{r_0}(0)}u(x)\\ (m-\varepsilon_1)(r-\varepsilon_1)U_0(r_0)\left(A+\dfrac{r_0^\alpha}{v}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}\geqslant\max\limits_{x\in\partial B_{r_0}(0)}u(x).\end{cases}$$

对于任意$\varepsilon\in(0,\delta)$. 令$\eta_0=\eta_0(N,q,\theta,\lambda)>0$，使得对于任意$\eta\in(0,\eta_0)$，当$x\in\partial B_{r_0}(0)$，有

$$\omega^-_{\varepsilon,\eta}(x)\leqslant u(x)\leqslant\omega^+_{\varepsilon,\eta}(x). \tag{7}$$

通过推论1，得到

$$\lim_{|x|\to 0}\frac{u(x)}{\omega^+_{\varepsilon,\eta}(x)}=0. \tag{8}$$

通过引理3和比较原理，得到$\liminf\limits_{|x|\to 0}\dfrac{u(x)}{U_0(x)}>0$，从而

$$\lim_{|x|\to 0}\frac{\omega^-_{\varepsilon,\eta}(x)}{u(x)}=0. \tag{9}$$

通过式(6)~(9)和比较原理，得到对于任意$0<|x|\leqslant r_0$，$\eta\in(0,\eta_0)$，有

$$\omega^-_{\varepsilon,\eta}(x)\leqslant u(x)\leqslant\omega^+_{\varepsilon,\eta}(x). \tag{10}$$

在式(10)中，对于任意$x\in B_{r_0}(0)\backslash\{0\}$，令$\eta\to 0$，有

$$(1-\varepsilon)(m+\varepsilon_1)(r+\varepsilon_1)\left(B+\frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}\leqslant\frac{u(x)}{U_0(x)}\leqslant(m-\varepsilon_1)(r-\varepsilon_1)(1+\varepsilon)\left(A+\frac{|x|^\alpha}{v}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}.$$

令 $\varepsilon \to 0$,得

$$(m+\varepsilon_1)(r+\varepsilon_1)\left(B+\frac{|x|^{\alpha}}{v}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \leqslant \frac{u(x)}{U_0(x)} \leqslant (m-\varepsilon_1)(r-\varepsilon_1)\left(A+\frac{|x|^{\alpha}}{v}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}.$$

令 $\alpha \to 0, \varepsilon_1 \to 0$,根据上下极限的保不等式性得

$$mr \leqslant \liminf_{|x|\to 0}\frac{u(x)}{U_0(x)} \leqslant \limsup_{|x|\to 0}\frac{u(x)}{U_0(x)} \leqslant mr,$$

即 $\lim\limits_{|x|\to 0}\dfrac{u(x)}{U_0(x)} = mr$.

3　结　语

本文主要利用上下解方法和比较原理研究一类带有 Hardy 势的非线性椭圆型方程解的存在性,定理 2 包含了 Cîrstea et al.(2021)的结论,所以是对 Cîrstea et al.(2021)的进一步推广,下一步可以考虑带有次二次位势函数 $|x|^{-\alpha}(0<\alpha<2)$ 或超二次位势函数 $|x|^{-\alpha}(\alpha>2)$ 情形下非线性椭圆型方程解的存在性和渐近性.

参考文献:

ADIMURTHI, ESTEBAN M J, 2005. An improved Hardy-Sobolev inequality in $W^{1,p}$ and its application to Schrödinger operators [J]. Nonlinear Differ Equ Appl, 12: 243–263.

BREZIS H, VÁZQUEZ J L, 1997. Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems[J]. Rev Mat Complut, 10(2): 443–469.

CABRÉ X, MARTEL Y, 1998. Weak eigenfunctions for the linearization of extremal elliptic problems[J]. J Funct Anal, 156(1): 30–56.

CARMONA J, MARTÍNEZ-APARICIO P J, SUÁREZ A, 2013. Existence and non-existence of positive solutions for nonlinear elliptic singular equations with natural growth[J]. Nonlinear Anal Theory Meth Appl, 89: 157–169.

CÎRSTEA F C, FĂRCĂȘEANU M, 2021. Sharp existence and classification results for nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ with Hardy potential[J]. J Differ Equ, 292: 461–500.

CÎRSTEA F C, RĂDULESCU V, 2004. Extremal singular solutions for degenerate logistic-type equations in anisotropic media[J]. Comptes Rendus Math, 339(2): 119–124.

DU Y H, 2006. Order Structure and topological methods in nonlinear partial differential equations: Vol. 1: Maximum principles and applications[M]. Singapore: World Scientific.

GARCÍA AZORERO J P, PERAL ALONSO I, 1998. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems[J]. J Differ Equ, 144(2): 441–476.

MONTENEGRO M, TORDECILLA J A L, 2021. Existence of positive solution for elliptic equations with singular terms and combined nonlinearities[J]. J Math Anal Appl, 503(2): 125316.

SAEEDI G, HUSAINI M A, 2023. Existence of solutions to a class of quasilinear elliptic equations[J]. J Math Anal Appl, 521(1): 126901.

VÁZQUEZ J L, ZUAZUA E, 2000. The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential[J]. J Funct Anal, 173(1): 103–153.

WANG M C, ZHANG Q, 2019. Existence of solutions for singular critical semilinear elliptic equation[J]. Appl Math Lett, 94: 217–223.

WEI L, DU Y H, 2017. Exact singular behavior of positive solutions to nonlinear elliptic equations with a Hardy potential[J]. J Differ Equ, 262(7): 3864–3886.

ZHANG Q Y, ZHANG M Z, 2024. Multiple solutions for perturbed semilinear Schrödinger equations[J]. J Math Anal Appl, 536(2): 128220.

ZHANG X G, JIANG J Q, WU Y H, et al, 2019. Existence and asymptotic properties of solutions for a nonlinear Schrödinger elliptic equation from geophysical fluid flows[J]. Appl Math Lett, 90: 229–237.

(责任编辑　冯兆永)